Analyse (04/05)
Eerste herhalingstentamen, Maandag 29 augustus, 2005
duur: 3 uur.

Lees elk opgave eerst in zijn geheel door. Vermeld de gebruikte stellingen kort en bondig. Geef duidelijk aan wat je aangaat tonen. Een antwoord zonder toelichting, ook al is het antwoord goed, levert geen punten op.

1.[1,9] Bewijs dat de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

een C^1–functie op $\mathbb{R}^2$ is. Wat moet je doen om aan te tonen dat f niet of wel C^2 is?

2.[1] Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(x,y) = 2xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.
(i)[2] Toon aan dat f continu is op $\mathbb{R}^2$ en dat $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0$. (Aanwijzing: Bewijs en gebruik dat als $r = \sqrt{x^2+y^2}$ dan geldt $|f(x,y)| \leq r^2\mathrm{e}^{-r^2}$.)
(ii)[2] Formuleer een gevolg van de stelling van Weierstrass waaruit blijkt dat de functie f een absoluut maximum en een absoluut minimum heeft.
(iii)[5] Bewijs het in (ii) bedoelde gevolg. (Opmerking: Het gevolg dat je moet bedenken is een variant van de gevolgen die in het dictaat staan en het bewijs komt er op neer dat bijvoorbeeld het maximum op een schijf om de oorsprong met straal R wordt aangenomen voor voldoend grote R. Je moet de details vermelden.)

3.[1] (i)[3] Toon met behulp van de globale inverse functie stelling aan dat door

$$F(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y)$$

een C^∞-diffeomorfie $F : O \to U$ wordt gedefinieerd waarbij

$$O = (0,\infty) \times (-\pi,\pi), \quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}.$$

(ii)[3] Bepaal $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ en $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)$.

(iii)[3] Stel $f : U \to \mathbb{R}$ is een C^1-functie die voldoet aan

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in U.$$

Beschouw de functie $g(r,\varphi) = f(F(r,\varphi))$. Toon aan dat $\dfrac{\partial g}{\partial\varphi}(r,\varphi) = 0$ en leid hieruit af dat er een C^1-functie $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ is zó dat $f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})$ voor alle $(x,y) \in U$.

Z.O.Z.

4.[1](i)[5] Toon aan dat er een open omgeving U van $(1,0)$ in $\mathbb{R}^2$ en twee C^2-functies $u, v : U \to \mathbb{R}$ zijn met $u(1,0) = 1$, $v(1,0) = 2$ en voor alle $x \in U$:

$$xu(x,y) + \sin(yv(x,y)) = 1, \quad u(x,y)v(x,y) + xy = 2.$$

(ii)[4] Bereken $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0)$ en $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,0)$.

5. De onderdelen (a) en (b) kunnen onafhankelijk van elkaar gemaakt worden.
(a)[5] Bepaal met behulp van de Hessiaan de locale extrema en hun aard van $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x-y}$ op $\mathbb{R}^2$ en onderzoek of er globale extrema zijn.
(b)[4] Bepaal met behulp van de multiplicatorenmethode de extrema en hun aard van de functie $g(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.